VITTORIO EM. III

FONDO PIZZOFALCONE

BIBLIOTECA PROVINCIALE
mss. A 3. 16.
Armadio XXV
Palchetto
Num.° d' ordine 37
13653

NAZIONALE
BIBLIOTECA
VITTORIO EM. III
B. Prov.
Miscellanea
A
3
16
NAPOLI

SAN
678101

SCIOGLIMENTO

DEL

NODO DELIACO

OSSIA

DEL PROBLEMA DELLA DUPLICAZIONE PIANO-GEOMETRICA DEL CUBO

ESCOGITATO DAL

P. D. LUIGI DI GENNARO

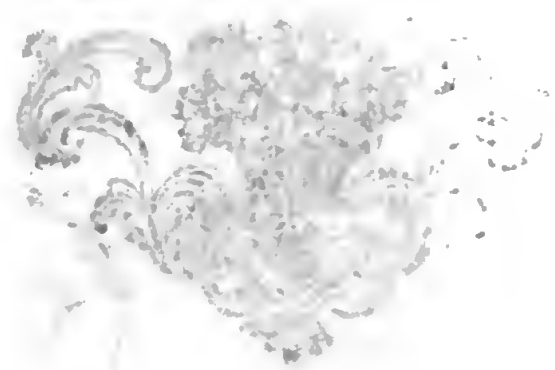
CHIERICO REGOLARE TEATINO.

IN TRAPANI DI SICILIA ANNO 1801.

IN NAPOLI)(MDCCCII.

PRESSO GENNARO GIACCIO

Con Licenza de' Superiori.



PREFAZIONE.

CHiunque che non sia dell'intutto straniero nelle Matematiche Discipline, o che almeno abbia gustato i primi rudimenti delle medesime ne' sei primi libbri Euclidei, saper deve l'origine, e l'istorie del famoso Problema denominato Deliaco (a). Una peste non mai prima intesa a memorie d'Uomini, come lo attesta Tucidide, desolava le Città della Grecia, e principalmente Atene, l'antica Madre della scienza. Tutti gli umani rimedj furono vani, e non poterono arrestare i furori del contagioso male.

Si ebbe ricorso agli oracoli, e sopratutti a quello di Apollo in Delo, più degli altri allora rinomato. Consultato adunque, rispose, che allora cesserebbe la peste, qualora l'Altare del Nume, che era Cubo, salva la figura cubica, si raddopiasse. Furono perciò premurati dal popolo i più valenti Geometri a ritrovare il lato di un Cubo, che fosse doppio di un altro dato. Molti pertanto furono i metodi, che si propose ciascuno, e varie vie tentarono per risolvere un tale Problema. Ma inutili, e vuoti riuscirono tutti li sforzi de' più periti Geometri.

Ippocrete di Chio, Geometra di molta fama, il quale quadrò due pozioni di cerchio, ben note sotto il nome di Lunule d'Ippocrate, fu il primo ad indicare il vero modo,

(a) Si vedono sù questa materia Eratostene de Cubi duplicatione alla fine dell'opera di Arato. *Vitruvio* Architectura lib. 9. cap. 3. *Plutarco* de genio Socratis. *Pappo* Collectiones Mathematicæ. lib. 3. prop. 5. *Eutocio* Commentaria in Archimedem de Sphæra & Cylindro, ed altri Autori.

ſtrumenti diversi dalla riga, e dal comparso, come sono le squadre, ovvero norme di Platone; e l'iſtrumento del Cartesio anche più complicato, in cui vengono inserte più norme, quantunque serva poi per più di quattro continue proporzionali, o si deve ricorrere alle curve diverse dal cerchio, che non possono descriversi con un sol tiro di compasso; ovvero se si fa uso della sola riga, e compasso; devonsi tentando rintracciare alcuni punti: laddove si desidera la soluzione del problema con la piana, ed elementare geometria, cioè con la retta, ed il cerchio, o sia con la riga, e compasso, e senza andare in modo alcuno tentando.

Da ciò che finora si è detto, può ognuno capire facilmente lo ſtato della quiſtione, la natura, e l'indole del Problema, che hò posto sotto il suo vero, e genuino aspetto.

Intanto per una combinazione fortunata, sebbene dopo non poche, e lunghissime mie fatiche, respinto sempre dalla difficoltà dell'impresa, esce al Publico finalmente il vero sciogliimento di queſto già da tanti Secoli decantato problema, veſtito di tutte quelle circoſtanze, e condizioni, che si richieggono alla piana e rigorosa geometrica soluzione; e si ritrovano ormai due medie continue proporzionali trà due date rette con quella ſtessa facilità, con cui se ne ritrova una.

Debbo però prevenire i Leggitori, che una parte della dimoſtrazione non è diretta, ma indiretta, cioè per reductionem ad absurdum, vale a dire, quando poſta per vera l'ipotesi, o sia l'assunto dell'avversario, che nega, si conduce quasi per mano, secondo le verità geometriche da lui concedute, a confessare un'assurdo, cioè a negare qualche geometrico assioma, ovvero, come la definiste il chiarissimo Ab. D. Antonio Genovesi nella sua arte Logicocritica lib. 3. cap. 4. quando si dimoſtra non poter altrimenti esser la cosa se in un sol modo, ad esclusione di tutti gli altri.

Tal genere di dimoſtrazione equivale perfettamente ad ogni altra dimoſtrazione diretta, e ne abbiamo degli molti esem-

pli

pli nelle euclidee proposizioni de' suoi primi libri : e per non accennarle tutte, ne addurrò alcune. Tali sono le 14. 18. 19. 28. 39. 40. 48. del libro primo. La 1. 4. 5. 6. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 18. 19. del libro terzo. La 26. del libro sesto &c. le quali sono egualmente certe, che le altre tutte, sebbene siano indirettamente dimostrate. Perchè se non si ammettessero, che le sole verità dimostrate direttamente bisognerebbe eliminare dal numero delle verità geometriche la metà quasi del primo libro di Euclide, tutto quasi il terzo, e altre proposizioni sparse negli altri libri della piana, e solida geometria, e tante altre innumerevoli verità contenute in tutte le parti della Matematica, lo che non si affermerà da uomo alcuno. Se però qualche Geometra più penetrante di me arrivasse, analizzando meglio la figura, a ritrovare la dimostrazione diretta di ciò, che io dimostro indirettamente, allora sarebbe l'ultimo pregio dell'opera. Non già, che maggior certezza acquistasse la verità, la quale è una, e quando è dimostrata geometricamente, non è più suscettibile di forza maggiore; ma perchè sembra, che lo spirito umano rimanga meglio convinto da una dimostrazione diretta, che indiretta come sarebbe la dimostrazione dalla proposizione 32. del libro primo, di Enclide inventata da Pitagora, che li tre angoli di un triangolo fanno la somma di due retti, quale da Aristotele viene stimata, come il modello di una perfettissima dimostrazione. La ragione si è, perchè, come dice il lodato Autore nel citato luogo, la dimostrazione diretta illumina ed istruisce l'intelletto, laddove la dimostrazione indiretta lo costringe, ma non lo illumina, e non lo istruisce. L'altra parte poi della dimostrazione, che è propriamente la dimostrazione della soluzione del problema, è diretta, chiarissima, e facilissima, e ardisco paragonarla alla sopradetta, commendata dallo Stagirita.

Una sola difficoltà puole essermi mossa, non già dal Publico letterato, ma dal Publico curioso, e si è questa: Che non è credibile, che tanti insigni Uomini nella Geometrica scienza, i quali tanti e tanti sublimi Teoremi, e verità

tra-

trascendentali scoprirono, siansi smarriti nello scioglimento di un Problema di piana geometria, e che il medesimo poi sia stato ritrovato da uno, che appena meriterebbe di essere ascritto nel numero de' diloro discepoli. A questa difficoltà posso io rispondere in due forme. Primo; perchè non si richiede al discioglimento di questo, per publica fama, celebrato Problema un' ingegno del primo ordine, una mente sublimissima, ed una profondissima scienza delle cose matematiche: Che anzi questo era il quesito, di scioglierlo, cioè con la iniziatura della Geometria; onde è, che ciascuno, il quale non avesse oltrepassato li soli primi sei libri di Euclide era a portata di scioglierlo, e superare i Platoni, gli Euclidi, gli Apollonj Pergei, e gli Archimedi. Ed in fatti si vede nella dimostrazione, che la cognizione necessaria per lo scioglimento di un tal Problema non oltrepassa l' ottava proposizione del libro sesto. Secondo perchè la dimostrazione istessa risponde per me. Se ella è legitima, se appoggiata sopra dimostrati Teoremi, se la catena de' raziocinj è ben connessa, se niente vi è di precario, deve necessariamente conchiudere; e contro i fatti indubitati, simili objezioni luogo alcuno non devono avere. Confesso però anche io, essere cosa da recare meraviglia, ed io medesimo dopo scoperto il punto geometrico, che scioglie il Problema, e trovatane la dimostrazione, sono rimasto altamente sorpreso, come la elevatissima, e sottelissimamente di Platone, sopranominato il Divino, il quale nel risolvimento di questo Problema tenne la strada istessa, che ho seguita io, come la più piana, e la più facile (non essendo il mio metodo diverso del suo, eccetto che quello è meccanico, ed il mio geometrico) non abbia saputo ritrovar questo punto, con tutto il suo accuratissimo, e profondissimo discernimento.

Una cosa in fine restami a chiedere dai curiosi Leggitori, cioè di leggere questo mio scritto, e considerare la nuova scoperta matematica, che io loro presento, senza alcuna

cuna prevenzione o di troppa ſtima per gli Autori chiariſsimi teſtè mentovati, e di disprezzo per l' Autore, che or comparisce in scena; ovvero di credere da quel che forse avran letto sù di qualche libbro, o inteso dire; che un tal Problema sia insolubile per mezzo della piana geometria; Perchè con tale disposizione di animo si allucinaranno certamente, e crederanno, o piuttoſto vorranno credere di trovare errori, e paralogismi ove realmente non sono; Pertanto spero, che il publico de' Letterati gradirà queſta mia qualunque sia ſtudiosa fatica, poichè sarà d' incitamento, e di esempio ai sublimi Ingegni della Letteraria Republica di fare delle più importanti, e grandiose scoperte, siccome io sinceramente desidero.

PROBLEMA.

Date due linee rette, trovare trà esse due medie continue proporzionali.

SOLUZIONE.

SE le due date rette sono eguali, esse medesime saranno le due medie continue proporzionali richieste. Onde mettendole ad angolo retto, e compiendo di esse il quadrato, i quattro lati del medesimo saranno le quattro continue proporzionali; ovvero descrivendo intorno di esse il quadrato, li quattro semidiametri del quadrato saranno le quattro continue proporzionali.

La qual cosa non ha bisogno di dimostrazione; essendo un' assioma, che le quantità eguali sono sempre continuamente proporzionali a se medesime. Se poi le due date rette siano disuguali in qualunque si voglia proporzione; ecco l' operazione.

Siano le due date rette disuguali *BC*, *BE* (Fig. I.) Si pongano ad angolo retto nel punto *B*, e si prolunghino C*B*, verso D, EB verso A. Sopra la maggiore BC si descrive il semicerchio BGC, e dal centro F si alzi il raggio perpendicolare FG. Si porti dipoi la minore *BE* sopra la maggiore nel punto O. La (*a*) retta *BO* si tagli per metà nel punto S. Dal punto S si alzi la perpendicolare ST, che tagli la periferia del semicerchio nel punto T. Dal punto d' intersezione T si tiri la

(a) *Prop.* 10. *lib.* 1.

retta TX perpendicolare al raggio FG (*a*) nel punto X, o sia parallela alla retta BC (*b*). Per li due punti C, X si tiri la retta CXA, che vada ad incontrare la retta BA prolungata nel punto A. Sopra la retta AE si descriva il semicerchio EDA, che tagli la retta CB prolungata nel punto D.

Dico, che le due rette BD, BA sono le due medie continue proporzionali trà le due date BC, BE, cioè che stà EB a BD, come BD a BA, e BD a BA, come BA a BC.

DIMOSTRAZIONE

Si tirino le rette AD, DE, EO (Fig. 2.). Per li due punti X, B; si conduca la retta XBM, che vada ad incontrare la retta DE nel punto M. Per il punto M si tiri la retta MPN parallela alla retta DBO, e che incontri la retta EO nel punto N. Si prolunghi la retta TS sino che incontri la retta EO. Dico che caderà nel punto N. Lo dimostro.

Se la retta TS prolongata non cade nel punto N della retta EO, caderà in un punto, o al disopra, o al disotto del punto N. Ma l'uno, e l'altro caso è assurdo. Dunque caderà necessariamente, e matematicamente nel punto N.

PRIMO CASO.

Cada al disopra del punto N nel punto Q. Si prenda nella retta NM, P*a* uguale a PN (*c*), e si congiunga E*a*. Li due triangoli *a*PE, EPN hanno i lati

*a*P

(a) *Prop.* 12. *lib.* 1.
(b) *Prop.* 31. *lib.* 1.
(c) *Vedi Sch.* 3.

*a*P, PN eguali (*a*) il lato EP commune, e gli angoli trà essi lati eguali compresi, retti, e perciò eguali. Dunque (*b*) sono equilateri, ed equiangoli, e perciò l'angolo *a*EP è uguale all'angolo NEP. Ma l'angolo NEP è semiretto (*c*) dunque l'angolo *a*EP anche è semiretto.

Essendo nel triangolo EBO la retta SQ parallela alla retta BE per l'ipotesi dell'Avversario, la medesima taglia i lati BO, OE proporzionalmente (*d*). Ma BO è tagliata per metà nel punto S (*e*). Dunque anche la retta OE sarà tagliata per metà nel punto Q. Si tiri dal punto Q la retta indefinita QR, parallela alla retta BO. Queſta taglierà proporzionalmente, e similmente i due lati EO, EB; ma il lato EO è tagliato per metà nel punto Q, siccome ora si è dimoſtrato; dunque anche BE è tagliato per metà nel punto V, e sarà BV eguale ad EV. Per li due punti G, B si tiri la retta GBb, che incontri la retta QR nel punto b.

L'angolo GBF è semiretto, per li due lati BF, FG eguali, come raggi dello ſteſso cerchio, e l'angolo in F retto; dunque anche l'angolo ABG è semiretto per essere compimento all'angolo ABF, che è retto (*f*). L'angolo bBV è oppoſto al vertice all'angolo ABE; dunque anche egli è semiretto (*g*).

Li due triangoli BbV, EbV hanno i lati BV, EV eguali, come si è dimoſtrato bV commune, e gli angoli trà essi lati eguali in V eguali, perchè retti;

(a) *Per costruzione.*
(b) *Prop.* 4. *lib.* 1.
(c) *Per costruzione.*
(d) *Prop.* 2. *lib.* 6.
(e) *Per costruzione.*
(f) *Per costruzione.*
(g) *Prop.* 15. *lib.* 1.

Dunque (*a*) sono trà di loro equilatari, ed equiangoli, e conseguentemente l'angolo bBV è uguale all'angolo bEV; ma l'angolo bBV è semiretto, come si è dimoſtrato, dunque anche l'angolo bEV è semiretto; ma l'angolo aEP anch'egli è semiretto per la coſtruzione. Dunque l'angolo bEV è eguale all'angolo aEP: La parte uguale al tutto. Lo che è assurdo. Non può dunque la retta TS prolungata cadere nella retta EO in un punto al disopra del punto N.

SECONDO CASO.

Nemmeno puol cadere nella retta EO (Fig. 3.) in alcun punto al disotto del punto N. Cada al disotto nel punto Q, e sia SQ parallela a BE. Essa taglierà i lati EO, OB proporzionalmente (*b*) e perciò sarà EQ eguale a QO; e tirata RQ parallela a BO, sarà parimente EV eguale a VB. Si faccia lo ſtesso che nel primo caso, e si congiunga Eb. Li due triangoli E*b*V, bVB sono equilateri, ed equiangoli, come sopra si è dimoſtrato, e quindi l'angolo bBV è uguale all'angolo bEV; ma l'angolo bBV è semiretto, come sopra si dimoſtrò; onde anche l'angolo bEV è semiretto; ma l'angolo *a*EP anch'esso è semiretto (*c*). Dunque l'angolo bEV è uguale all'angolo aEP. Il tutto eguale alla parte. Lo che è assurdo.

Non puole dunque la retta TS prolungata cadere in altro punto della retta EO, che nel punto N. Essendo pertanto dal punto N tirata NM parallela a BO nel triangolo EBO, essa taglierà i lati EO, EB proporzionalmente; ma EO è tagliata per metà nel punto Q; dun-

---

(a) *Prop. 4. lib. 1.*
(b) *Prop. cit. lib. 6.*
(c) *Per costruzione.*

dunque anche BE è tagliata per metà nel punto P, e BP, è uguale a PE.

Ciò premesso, e dimoſtrato, ecco la dimoſtrazione chiara, e diretta dello ſciolto Problema.

Si prolunghi la retta XT (Fig.4.) sino che incontri la retta BA nel punto H. Li due triangoli MPE, MPB hanno li due lati BP, PE uguali, come si è dimoſtrato, MP commune, e gli angoli compresi in P eguali, sendo retti. Dunque (*a*) sono trà di loro equilateri, ed equiangoli, e perciò simili. Il triangolo MPB è simile al triangolo HBX, per gli angoli alterni HXM, XMN eguali (*b*) gli angoli oppoſti al vertice in B eguali; e gli angoli XHB, MPB retti (*c*). Il triangolo BHX è equilatero, ed equiangolo, e perciò simile al triangolo BFX; essendo entrambi metà dello ſtesso parallelogrammo HBFX (*d*). Il triangolo BFX è equilatero, equiangolo, e simile al triangolo XFC, per i lati BF, FC eguali, come raggi di uno ſtesso cerchio, FX comune; e gli angoli compresi in F eguali, poichè retti (*e*). Dunque il triangolo EPM è simile al triangolo CF*X*. Ma il triangolo EPM è simile al triangolo EBD, per la retta PM parallela a DB (*f*) e il triangolo EBD è simile al triangolo DBA, per essere il triangolo EDA rettangolo, o sia per l'angolo retto in D nel semicerchio (*g*). Dunque anche il triangolo CFX è simile al triangolo DBA. Ma il triangolo CF*X* è simile al triangolo CBA (*h*). Dunque il triangolo CAB è simile al trian-

---

(a) *Prop. cit. lib.* 1.
(b) *Prop.* 27. *lib.* 1.
(c) *Per costruzione.*
(d) *Prop.* 34. *lib.* 1.
(e) *Per costruzione.*
(f) *Cor.* 1. *prop.* 4. *lib.* 6.
(g) *Prop.* 31. *lib.* 3.
(h) *Cor. cit. lib.* 6.

triangolo DBA; e per conseguenza gli angoli compresi trà i lati proporzionali sono eguali (*a*) cioè l'angolo DAB è uguale all'angolo ACB (*b*). Ma l'angolo *ACB* insieme con l'angolo BAC fanno un'angolo retto, per essere l'angolo in B retto (*c*). Dunque anche l'angolo *DAB* insieme con l'angolo *BAC*, o sia tutto l'angolo DAC è retto; e cadendo la perpendicolare *AB* nella base DC, sono *DB*, *BA*, *BC* continue proporzionali (*d*). Ma per l'angolo EDA retto nel semicerchio anche le rette *EB*, *BD*, *BA* sono continue proporzionali. Dunque le quattro rette *EB*, *BD*, *BA*, *BC* sono continue proporzionali, cioè a dire *EB* stà a *BD*, come *BD* a *BA*, e *BD* a *BA*, come *BA* a *BC*. Lo che dovea farsi, e dimoſtrarsi.

SCOLIO I.

Dissi, che nei due triangoli *DAB*, *CAB* (Fig. 5.) dimoſtrati simili, gli angoli eguali erano *DAB*, *BCA*, lo che sebbene si vede chiarissimo dalla proporzione dei lati, nondimeno affinche non possa presumersi da qualche sofiſta, che nei due sudetti triangoli simili gli angoli siano *DAB*, *BAC*; vengo a dimoſtrarne l'assurdo.

Nel triangolo *ABC* turti li tre lati *BG*, *CA*, *AB* sono tagliati similmente, per la XF parellela a *BA*, e XH parallela a *BC* (*e*) Ma *BC* è tagliata per metà nel punto F, centro del semicerchio; Dunque anche CA, ed *AB* sono tagliate per metà nei punti X, H, e perciò AH è uguale ad H*B*. Dunque li due triangoli AHX, *B*HX, che hanno li lati AH, H*B* equali, il lato XH co-

(a) *Def.* 1. *lib.* 6.
(b) *Vedi Sch. I.*
(c) *Prop.* 32. *lib.* 1.
(d) *Cor.* 1. *prop.* 8. *lib.* 6.
(e) *Cit. pr. lib.* 6.

comune, e gli angoli contenuti in H eguali, poiche retti, sono equiletari, ed equiangoli (*a*) e quindi l'angolo HAX è uguale all'angolo H*B*X. Onde essendo l'angolo D*A*B uguale all' angolo *B*AC nell'ipotesi dell' Avversario, sarà anche eguale all'angolo *A*B*X*; e le due rette AD, X*B*M per gli angoli sudetti alterni eguali, sono parallele, e per conseguenza li due angoli interni alla ſtessa parte ADM, DM*B* (*b*) sono eguali a due retti. Ma l'angolo ADM è retto, perchè deſcritto nel semicerchio (*c*). Dunque anche l'angolo DM*B* è retto.

Nel triangolo D*E*B le rette E*D*, E*B* sono proporzionalmente tagliate per la MP parallela a D*B*; ma E*B* è tagliata per metà nel punto P, come sopra si è dimoſtrato; dunque anche DE è tagliata per metà nel punto M (*d*).

Si tiri dal centro K al punto M la retta KM. Siccome queſta taglia per metà la corda DE nel punto M, la taglia perpendicolarmente (*e*). Dunque l'angolo DMK è retto, ed uguale all'angolo DM*B*. La parte eguale al tutto, che è assurdo.

SCOLIO II.

Nel solo caso del quadrato, cioè quando le date *BE*, *BC* sono eguali, sono pure eguali gli angoli DAC, BAC, perchè allora le rette MK MX della fig. 5. coincidono entrambe nella retta MT, e gli angoli D*A*B, C*A*B sono allora semiretti, e l'intiero DAC compoſto di due semiretti sarà retto, ed avrà luogo la dimoſtrazio-

(b) *Pr. cit. lib.* 1.
(b) *Prop.* 37. *lib.* 1.
(c) *Prop.* 31. *lib.* 3.
(d) *Prop. citata.*
(e) *Prop.* 3. *lib.* 3.

zione medesima, che nei casi della ineguaglianza delle due date.

SCOLIO III.

Nella dimostrazione si assunse per postulato, che nella retta MN (Fig. 2.) si prendesse Pe uguale a PN lo che suppone, essere la retta MP maggiore di NP, e così lo dimostro.

La retta MP non puol essere nè uguale, nè minore della retta PN; dunque necessariamente maggiore. Sia eguale. Essendo nel triangolo EPN gli angoli PEN, ENP eguali, cioe semiretti (*a*) le rette PE, PN sono eguali (*b*). Dunque la retta MP essendo uguale alla retta PN, sarà pure eguale alla retta PE. Li due triangoli FPM, FBD, per la parallela MP a *BD* sono simili (*c*). Dunque MP sta a PE, come *DB* a BE; ma MP nell'ipotesi è uguale a PE; dunque anche DB è uguale a *BE*.

Essendo DB media proporzionale trà *EB*, *BA* per l'angolo retto nel semicerchio EDA, se è uguale alla retta *BE*, sarà anche eguale alla retta *BA*, e per conseguenza la retta *BE*, è uguale alla retta *BA*. La parte uguale al tutto. Essendo, in pratica, il punto K centro del semicerchio EDA, sarà KE uguale ad AK; ma KE è maggiore di *BE*; Dunque anche AK è maggiore di *BE*; ed aggiungendovi KB, sarà *a fortiori AB* maggiore di *BE*. Considerata dunque la retta AB come un tutto, sarà *BE* una parte. Quindi se BE sarà uguale a BA, la parte sarà uguale al tutto. Così dico ancora del secondo caso. Onde la mia asserzione è falsa se per *tutto* s'intenda l'intiero diametro EA. Ma io intendo per

(a) *Per costruzione.*
(b) *Prop. 6. lib. 1.*
(c) *Prop. 4. lib. 6. cor. 1.*

per *tutto* la parte maggiore *BA*, a cui rapporto la parte minore *BE*. Con lo stesso raziocinio si dimostra, che la retta MP non puol' essere minore delle rette PN, perchè parimenti sarebbe *DB* minore di *BE*, e *BA* anch' essa minore di BE. Il tutto minor della parte.

COROLLARIO I.

Dal sin quì dimostrato si deduce chiaramente, che il Problema è determinatissimo, cioè che data la proporzione delle due rette, non ammette se non una sola soluzione, ovvero un sol punto, che sodisfa la questione. Siccome poi sono infinite le proporzioni, che possono darsi trà le due date; così la serie degli infiniti punti corrispondenti, ossia il luogo geometrico, o la curva, che sodisfa in tutti i casi il Problema nella mia solazione è il quadrante della periferia del cerchio, principiando dal punto T (Fig. 6.), quando le due date rette sono eguali sino al punto *B*, quando la prima delle date svanisce, e diventa eguale al zero; nel qual caso, essendo una la retta data, essa medesima sarà sempre continuamente proporzionale, non altrimenti, che nel caso, in cui le due date sono eguali.

E perciò non è, come scrissero alcuni (*a*) senza però dimostrarlo, il luogo geometrico di questo Problema, necessariamente una conica Sezione.

E molto meno è vero ciò che scrissero altri (*b*) parimenti senza dimostrazione, che il detto Problema egualmente, che la trisezione dell' angolo rettilineo fosse impossibile a risolversi con la piana Geometria, ove-

(a) *Il P. Orlando Celestino nella prefazione alle sue Sezioni Coniche, aggiunte alla Geometria dal P. Tacquet.*

(b) *D. Nicola de' Martino negli elementi della sua Algebra lib. 2. cap. 1.*

vero coll'intersezione della retta col cerchio. Intendo dire che la curva, o sia il *luogo geometrico* di questo problema sia il quadrante della periferia del circolo; non già niego essere il circolo un luogo geometrico, e anche una conica Sezione, cioè, quando il piano della Sezione del cono è parallelo alla base. Niego soltanto quel che dice il P. Orlandi, che il luogo geometrico di questo problema sia *necessariamente* una delle altre tre Sezioni coniche, cioè o l'Elisse, o l'Iperbole, o la parabola.

COROLLARIO II.

Trovate le due medie continue proporzionali trà le due rette, è facile di duplicare, triplicare, quadruplicare &c. e generalmente di ingrandire, o diminuire in qualunque si voglia proporzione non solo un cubo, ma qualunque solido, sia egli terminato da superficie piane, o curve; perchè facendo il solido simile sopra la seconda continua proporzionale, sarà il solido dato a questo secondo in ragione triplicata de' lati omologi, cioè come il lato del solido dato al quarto continuo proporzionale (a).

FINE.

AP-

(a) *Sch. p.* 18. *lib.* 12.

Nota. Le citazioni de' luoghi geometrici devono riscontrarsi negli Elementi di Euclide concinnati, e commentati dal P. Tacquet, con le Note del Wiston. Edit. Nap. 1744.

APPENDICE

I. PARTE.

In cui si dimostra diversamente la prima parte della sopra data dimostrazione.

COngiunte le rette DA, DE, EO, (Fig. 1.) si tiri per li punti X, *B*, la retta X*B*M, e dal punto M la retta MN parallela a BO. Dipoi col centro B, ed intervallo *B*E si descriva il quadrante, e si tiri la corda Ec. Finalmente si prolunghi la retta TS; dico che caderà in N.

DIMOSTRAZIONE.

Cada in un punto al disopra in Q. Si tiri QR parallela a *B*O, e per i punti G, *B* si conduca la retta G*B*a, che incontri QR nel punto *a*, e si tiri E*a*.

Essendo SQ, *B*E parallele, e *B*O essendo tagliata per metà in S, sarà parimente la retta EO tagliata per metà nel punto Q; e per la QV parallela a BO, sarà parimente *B*E tagliata per mezzo in V. Li due triangoli *B*a*V*, E*a*V sono equilateri per li lati BV, EV eguali, *a*V comune, e gli angoli retti in V. Dunque l' angolo *a*B*V* è uguale all' angolo *a*E*V*, ma *a*B*V* è semiretto; dunque anche l' angolo *a*E*V* è semiretto. Ma essendo nel Quadrante le due rette B*c*, *B*E eguali, come raggi, e l' angolo in B retto, gli angoli *B*c*E*, *B*E*c*, sono anche semiretti. Dunque l' angolo *c*E*B* = *a*E*B*. La parte eguale al tutto. Della stessa maniera dimostro, non poter la retta prolongata TS cadere in altro punto sopra del punto N; e la stessa dimostrazione vale, se si faccia

cadere in qualche punto al disotto. Dunque cade necessariamente in N.

SCOLIO.

Una difficoltà potrebbe farmisi contro questa dimostrazione, cioè che non si vede la ragione, per cui debba essere BO = BE, potendo essere o maggiore, o minore, purchè fosse tagliata per metà in S, nel qual caso sempre la retta TS caderebbe nel punto N; ma allora variandosi il punto T, si variarebbero le quattro continue proporzionali.

A sciorre una tale difficoltà premetto il seguente

LEMMA.

Se una retta si accosti verso la sua parallela, serbando sempre il parallelismo, descriverà col suo moto un parallelogrammo. Lo dimostro.

Se la retta AB (Fig. 2.) si accosta perpendicolarmente alla sua parallela DC, la cosa è evidente, perchè essendo la retta AD, BC. li perpendicoli, o siano le distanze delle due parallele, sono sempre trà di loro eguali, e parallele (*a*), anche le due rette *AB*, DC. che le congiungono sono eguali, e parallele per l'ipotesi. Dunque il quadrilineo ADCB è parallelogrammo.

Se poi si accosti obliquamente per le linee *BE*, *AF*, allora essendo per l'ipotesi *AB*, FE eguali, e parallele; anche le due rette AF, BE, che le congiungono, sono eguali, e parallele (*b*), e il quadrilineo AFEB parallelogrammo. Ciò premesso. Dico, che se la retta *BO* è mag-

(a) *Def.* 36. *lib.* 1.
(b) *Prop.* 33. *lib.* 1.

maggiore, o minore della retta BE, non ha luogo la sopradetta dimostrazione, e lo dimostro.

Accostandosi la retta *a*Q verso la sua parallela MN parallelamente descriverà col suo moto un parallelogrammo. Se *B*O è maggiore, o minore di *B*E, l'angolo in O sarà viceversa minore, o maggiore del semiretto; dunque farà l'angolo opposto in *a* parimente minore, o maggiore del semiretto (*a*), e perciò il punto *a* non sarà più il concorso della retta G*B* prolongara con la retta RQ, lo che è contro l'ipotesi, e non hà luogo la dimostrazione. Per l'opposto avendo luogo la dimostrazione, sarà l'angolo in *a* uguale all'opposto in O, ma l'angolo in *a* è semiretto; dunque l'angolo in O è semiretto, e *BE* = *BO*.

II. PAR-

(a) *Prop. 34. lib. 1.*

II. PARTE.

In cui si esamina la soluzione del Problema.

ESaminando analiticamente la mia soluzione geometrica del Problema, non si ritrova vera, se non nel solo caso, in cui le quattro continue proporzionali sono trà loro eguali; e quindi la mia soluzione, la quale è sempre vera in geometria, o sia nelle quantità lineari, non si verifica in numeri, se non quando i quattro continui proporzionali sono i medesimi. Vengo a dimostrarlo.

Nella mia soluzione la metà della terza continua proporzionale, cioè TS è media proporzionale trà la metà della prima, cioè BS, e la quarta meno la metà della prima, cioè CS.

Se le due estreme date si chiamino a, b, le due medie continue proporzionali sono $\sqrt[3]{a^2b}$, $\sqrt[3]{ab^2}$ (a). Espressa algebraicamente una tale condizione, si hà la seguente proporzione $\frac{a}{2} : \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{2} :: \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{2} : \frac{b-a}{2}$, e quindi nasce l'equazione $\frac{2ab-a^2}{4} = \frac{\sqrt[3]{a^2b^4}}{4}$, o sia $2ab-a^2 = \sqrt[3]{a^2b^4}$.

In questa equazione se le due quantità a, b si pongano eguali, sarà vera l'equazione. Sia per esempio $a=b=3$, sarà $18-9 = \sqrt[3]{729}$, cioè $9=9$. Non così però, se si pongono disuguali. E di fatti continuando il calcolo, si trova essere il caso impossibile.

Si

(a) *Vedi la nota del Wiston allo scolio del P. Tacquet della pr.* 18. *lib.* 12. *edit. Neap.* 1744.

Si alzi alla terza potenza la sopradetta equazione $2ab - a^2 = \sqrt[3]{a^2b^4}$, sarà $8a^3b^3 - 12a^4b^2 + 6a^5b - a^6 = a^2b^4$. E trasponendo sarà $a^2b^4 - 8a^3b^3 + 12a^4b^2 - 6a^5b + a^6 = 0$. E dividendo per a^2, si avrà l' equazione, $b^4 - 8ab^3 + 12a^2b^2 - 6a^3b + a^4 = 0$. La quale essendo potenza imperfetta non possono darsi in numeri le radici, e nemmeno per conseguenza li valori di a, b.

La ragione poi, per la quale nei numeri non si verifica la sopradetta proprietà delle quattro quantità continue proporzionali, se non nel solo caso dell' eguaglianza delle medesime si è, perchè (fig. IV.) la retta TS una volta si considera, e si valuta per rapporto a BA; di cui è la metà; ed un' altra volta per rapporto alle due *BS*, SC, trà le quali è media proporzionale. Se questi due rapporti sono diversi, e disuguali, l' equazione sarà parimenti falsa. Nel caso poi, che le quattro continue siano eguali, allora li detti due rapporti sono li stessi, ed uguali, e quindi vera l' equazione. (Osservate la fig. 6. in cui *BH* è uguale a BS.)

Finalmente. Che li detti due rapporti differenti sì abbiano in linee, e non possano aversi ne' numeri, non dee recar meraviglia a chiunque sà, che si danno delle quantità lineari inassegnabili in numeri. Tale è il diametro del Quadrato per rapporto al suo lato. Tale ancora, se si cercasse dividere un numero talmente, che il Quadrato della parte maggiore sia eguale al rettangolo dell' intiero numero nella parte minore, cioè in estrema, e media ragione; lo che si ottiene nella quantità continua. (*a*).

(a) *Vedi prop.* 11. *lib.* 2.

III. PARTE.

In cui si dimostra separatamente la sopradetta proprietà delle quattro continue proporzionali.

TEOREMA.

SE sieno quattro rette continuamente proporzionali in ragione di minore ineguaglianza *BE*, *BD*, *BA*, *BC*, (Fig. 3.) sarà la metà della terza, media proporzionale trà la metà della prima, e la differenza trà la metà della prima, e la quarta.

DIMOSTRAZIONE

Si pongano due rette indefinite ad angolo retto in *B*; e si trasportino sù di essa le quattro date continue proporzionali. Bisetta la *EA* in *K*, si descriva il semicerchio, il quale passerà per il punto *D*. Dal punto *A* al punto *C* si tiri la retta *AC*. Sopra la quarta *BC* si descriva il semicerchio, e si alzi il raggio perpendicolare *FG*, che taglia la retta *AC* nel punto *X*. Si tiri la retta *XTH* parallela a *BC*, che taglia la periferia nel punto *T*, e si bassi la perpendicolare *TS*. Si tirino le rette *ED*, *DA*, e per li punti *X*, *B* si tiri la retta *XBM* che incontri la *ED* in *M*, e si tiri la retta *MP* parallela a *DB*. Ciò fatto. Li due triangoli *MBP*, *BHX* sono simili per le parallele *MP*, *HX*, e per gli angoli eguali al vertice in *B*. Il triangolo *BHX* è equilatero e simile al triangolo *AHX*, essendo il lato *AB* tagliato per metà in *H*, come lo è il lato *BC* in *F*, e perciò *AH* uguale a *BH*, il lato *HX* è comune, e gli angoli in *H*, trà essi lati eguali contenuti anche eguali, perchè retti (*a*).

Il

(*a*) *Prop. 4. lib. 1.*

Il triangolo AHX è simile al triangolo ABC per le parallele HX, BC (*a*). Il triangolo ABC è simile al triangolo ABD, per l'ipotesi dell'angolo retto in A; e il triangolo ABD è simile al triangolo DBE per l'angolo retto in D. Dunque il triangolo MBP, e simile al triangolo DBE. Ma anche il triangolo MPE è simile al triangolo DBE per le parallele MP, DB. Dunque li due triangoli MPB, MPE sono simili anche essi. Hanno inoltre un lato comune, cioè MP; dunque sono equilateri (*b*) e percio il lato PB è uguale al lato PE, e quindi la retta BE sarà tagliata in mezzo nel punto P. Per li punti G, B si tiri la retta G*Bb*, che incontri la retta MP in *b*. L'angolo ABG è semiretto, dunque l'opposto al vertice, cioè *b*BP è semiretto, e per l'angolo retto in B. anche l'angolo B*b*P è semiretto, e perciò BP è uguale a P*b*. Si prolunghi indefinitamente MP verso *f*, e si prenda PN uguale a P*b*, e si congiunga la retta BN.

Li due triangoli *b*PB, NPB sono equilateri, ed equiangoli per le due rette *b*P, PN eguali, il lato BP comune, e gli angoli contenuti in P eguali; Dunque l'angolo *b*BP è uguale all'angolo PBN; ma l'angolo *b*BP è semiretto, perciò anche l'angolo PBN è semiretto, e parimente l'angolo NBS, che è il suo compimento al retto PBS.

Si prolunghi la retta TS sino a che cada nella retta P*f*, dico, che caderà nel punto N, e lo dimostro.

Non puol cadere in alcun punto di quà del punto N, e nemmeno in alcun punto al di là. Dunque nel punto N.

(a) *Prop.* 2. *lib.* 6.
(b) *Prop.* 26. *lib.* 1.

PRIMO CASO.

Qui prego li Signori Lettori di una benigna attenzione. Cada in punto di quà del punto N, per esempio in *a*. La retta *Sa* è parallela alla retta *BP*, e perciò l'angolo *BSa* è retto, e il quadrilineo *BSaP* parallelogrammo. Si tiri il diametro *Ba*; l'angolo *SBa* è minore del semiretto *SBN*, perchè il lato *Ba* cade di dentro (*a*) dunque per l'angolo retto *BSa*, il terzo angolo *SaB* è maggiore del semiretto, per la somma di due retti. Si faccia eguale, tirando la retta *ad* parallela a *BN*, perchè essendo gli angoli alterni *NBa*, *daB* uguali, ed essendo *NBa* l'eccesso dell'angolo semiretto *PBN* sopra l'angolo *SBa*, togliendo questo dall'angolo *BaS* maggiore del semiretto, resterà l'angolo *daS* eguale al semiretto, e per l'angolo retto *dSa*, sarà pure l'angolo *Sda* semiretto, e perciò i lati *dS*, *Sa* sono eguali. Si abbassi la perpendicolare *ds*, che sarà parallela alla retta *BP*, e del punto *s* si tiri la retta *cS*. La retta *Sa* è uguale alla retta *BP*, o sia a *dc*; ma era la retta *Sa* uguale alla retta *ds*, dunque *cd* sarà uguale a *ds*, e per l'angolo retto in *d*, li due angoli *dsc*, *cds* sono semiretti, e perciò il triangolo *cds* è simile, ed equiangolo al triangolo *BPN*, e per il lato *BP* uguale a *dc*, sarà pure equilatero al medesimo (*b*) Dunque il lato *ds* uguale al lato PN; ma *ds*, *ca* sono eguali per il parallelogrammo *cdSa*; dunque *ca*, PN sono eguali, e togliendo il comune semmento *cN*, resterà *Pc* uguale di *Na*. Si tiri le retta *Pd*. Li due triangoli *Pdc*, *aSN* sono equilatari, ad equiangoli, essendo le rette *Pc*, *cd* eguali alle rette *Na*, *aS*, e gli angoli compresi trà essi lati uguali, cioè *SaN*, *dcP* anche eguali, perche retti; dunque anche il terzo lato è uguale al ret-

(a) *Def.* 12. *lib.* 1.
(b) *P.* 26. *lib.* 1.

terzo lato, cioè SN uguale a P*d*. Dal punto S si conduca la retta S*e* parallela a *d*P. Essendo S*e*P*d* parallelogrammo, Pd è uguale a *e*S. Dunque sarà SN uguale a S*e*; lo che è assurdo. Poiche la perperdicolare S*a* essendo la brevissima, le altre tanto maggiori, quanto più si scostano dalla perpendicolare (*a*) dunque S*e* e maggiore di SN, e non eguale. Perlocche la retta TS prolungata non puol cadere in alcun punto di quà dal punto N.

SECONDO CASO

Similissima è la dimostrazione di questo secondo caso, ed io non la soggiungo, se non per la diversa positura delle linee. Cada la retta TS (Fig. 4.) prolongata in un punto al di là del punto N, per esempio in *a*. Nel triangolo rettangolo BS*a*, l' angolo SB*a* è maggiore del semiretto SBN, e perciò l' angolo B*a*S è minore del semiretto. Si faccia eguale, tirando *ad* parallela a BN. L' angolo *da*S è semiretto, per la ragione sopra addotta nel primo caso, ed uguale all' angolo *ad*S. Li due triangoli *da*S, *B*PN sono equilateri, ed equiangoli, perchè sono equali gli angoli, e il lato S*a* eguale al lato BP; dunque anche il terzo lato sarà eguale al terzo, cioè il lato *d*S uguale al lato PN. Dal punto *d* si abbassi la perpendicolare *dc*, che sarà parallela a BP. Essendo *d*S*ac* parellelogrammo sarà *ds* eguale a *ca*: ma *ds* era eguale a PN; dunque *ca* è uguale a PN. detratta la comune P*a*, resterà *c*P eguale a N*a*. Si tiri la retta *c*B. Li due triangoli *c*PB, *a*NS sono equiangoli, ed equilateri, per li lati *c*P, IB uguali a N*a*, *a*S, e gli angoli contenuti B*P*c, S*a*N eguali, perchè sono retti. Dunque il terzo lato è uguale al terzo, cioè *c*B uguale a NS.

(a) *Cor.* 14. *prop.* 32. *lib.* 1.

Si prenda Pe uguale a Pc, e si tiri Be ; Li due triangoli cPB, ePB sono equilateri, perchè cP, Pe uguali, BP comune, e gli angoli contenuti in P eguali, come retti; dunque cB uguale a Be. Dal punto S si tiri Sg parallela a Be, sarà Sg uguale a Be; ma era NS eguale a cB, o sia a Be; dunque NS e uguale e gS; Ma per l' ipotesi dell' Avversario Sa è la perpendicolare, cioè la brevissima; dunque Sg, che più si allontana dalla medesima è maggiore di SN, che meno si scosta, e quindi non è uguale a SN. Dunque la retta TS prolungata nemmeno puol cadere in un punto al di là del punto N.

Caderà dunque in N. Ciò premesso, e dimostrato.

Per i punti E, N, si tiri la retta ENO. Li due triangoli BPN., EPN sono equilatari, ed equiangoli, per il lato BP uguale al lato PE, come si è dimostrato di sopra, PN commune, e gli angoli compresi in P eguali, cioè retti; dunque anche l' angolo PBN è uguale all' angolo PEN; ma l' angolo PBN è semiretto, dunque anche l' angolo PEN è semiretto. Il triangolo EBO è rettangolo, dunque l' angolo BOE sarà semiretto, e quindi BE uguale a BO.

Nel triangolo EBO essendo PN parallela alla retta BO, sono i lati BE, EO tagliati similmente, ma BE è tagliata per mettà in P, dunque EO è tagliata per metà in N; e per le parallele BE, SN anche il lato BO è tagliato per metà in S; ma BE, BO sono eguali, dunque anche le loro metà sono eguali cioè BS = BP; ma BP è la metà dalla prima BE, dunque anche BS sarà la mera della prima. Nel semicerchio BGC la retta TS è media proporzionale trà BS., SC (a) cioè trà la metà della prima, e la differenza trà la detta, e la quarta. La stessa TS è uguale alla metà della terza proporziale BA. Dunque &c. Lo che era da dimostrasi.

SCO-

(a) *Prop.* 31. *lib.* 3.

SCOLIO.

Ecco dunque come col metodo analitico, cioè supponendo già costruite le quattro continue proporzionali, e risolvendo si poteva ritrovare che BS è la metà di BE, e quindi col metodo sintetico, cioè componendo, costruire geometricamente, e scioglere il problema.

FINE.

S. R. M.

SIGNORE

GEnnaro Giaccio pubblico Stampatore di queſta Fedelissima Città di Napoli, supplicando espone a Voſtra Maeſtà, come desidera dare alle stampe, *lo scioglimento del nodo Deliaco, o sia del Problema della duplicazione plano-Geometrica del Cupo del P. D. Luigi di Gennaro*; perciò supplica la Maeſtà Voſtra di darli la revisione a chi meglio piacerà, e l' averà a grazia ut Deus.

Admodum R. D. Antonius Febraro perlegat, & in scriptis referat. Neapoli die IX. Mensis Auguſti 1802.

F. A. C. M.

S. R. M.

SIGNORE

AVendo per ordine della M. V. letto il Trattatino, che ha per titolo: *Scioglimento del nodo Deliaco, o sia del problema della duplicazione plano-geometrica del Cubo del Padre D. Luigi di Gennaro*: non vi ho ritrovata cosa, che offenda i dritti della Sovranità, o la bontà de' coſtumi: anzi ho notato l' impegno per altro lodevole dell' autore, il quale può eccitare l' animo di chi coltiva le mattematiche discipline, ed applicarsi con cure sempre maggiori pel ritrovamento della totale, e completa soluzione geometrica della duplicazione del Cubo, da molti secoli anziosamente ricercata. Son di parere perciò potersi il medesimo trattatino colle ſtampe pubblicare, se però così la M. S. si compiacerà. E proſtrato a' piedi del regal trono con profondissimo rispetto mi dico

Di V. M.

Napoli 14. Agoſto 1802.

Umiliss. Fedeliss. ed Obbedientiss. Suddito
Antonio Febraro.

Visa Relatione Regii Revisoris imprimatur. Neapoli die XVII. Mensis Augusti 1802.

F. A. C. M.

Joseph Abbate Secretarius.

Visa Relatione Regii Reviſoris D. Antonii Febraro de Commiſſione Reverendi Regii Cappellani Majoris.

Die 17. menſis Auguſti 1802.

Regalis Camera S. Claræ, providet, decernit, atque mandat quod imprimatur cum inſerta forma preſentes ſupplicis libelli, ac approbationis dicti Regii Reviſoris. Verum non publicetur niſi per ipſum Reviſorem facta iterum Reviſione affirmetur quod concordat, ſervata forma Regalium ordinum; ac etiam in publicatione ſervetur Regia Pragmatica. Hoc ſuum &c.

BISOGNI CIANCIULLI

V. A. R. C.

Ammora.

Illuſtris Marchio de Jorio Præſens S. R. C.; & cæteri ſpectabiles Aularum Præfecti tempore ſubſcriptionis impediti.

A Sua Eccellenza Reverendissima;

GEnnaro Giaccio pubblico Stampatore di queſta Fedeliſſima Città di Napoli ſupplicando eſpone a Voſtra Eccellenza Reverendiſſima come deſidera dare alle ſtampe *lo ſcioglimento del nodo deliaco, ossia del Problema della duplicazione plano-Geometrica del Cubo del P. D. Luigi di Gennaro*; perciò ſupplica a Voſtra Eccellenza Reverendiſſima di darli la reviſione a chi meglio piacerà, e l'averà a grazia ut Deus.

Adm. Rev. Dominus D. Dominicus Sarno S. Th. Prof. perlegat autographum operis ſuperius enunciati, & ſcripto referat. Die 19. menſis Auguſtus 1802.

F. ROSSI CAN. DEP.

Illustrissime ac Reverendissime Domine.

QUum Deliacus nodus, quem Clariſſimus Auctor ſolvendum adgreditur, non ſolum nil habeat, quod Catholicæ religioni, boniſque moribus adverſatur, verum & admirationem excitet, ſtimuloſque Matematichorum ſtudioſis adiiciat, typis mandari poſſe, niſi aliud Tibi placuerit, judicio quidem meo cenſeo. Datum Neapoli VIII. Kal. Septemb. 1802.

Humillimus, & addictissimus Cliens
Dominicus Sarno.

678101

fig. 2.

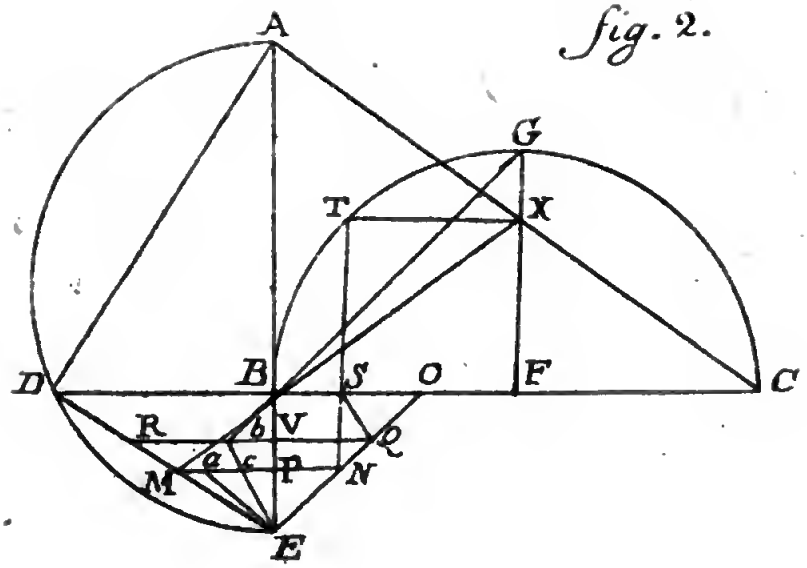
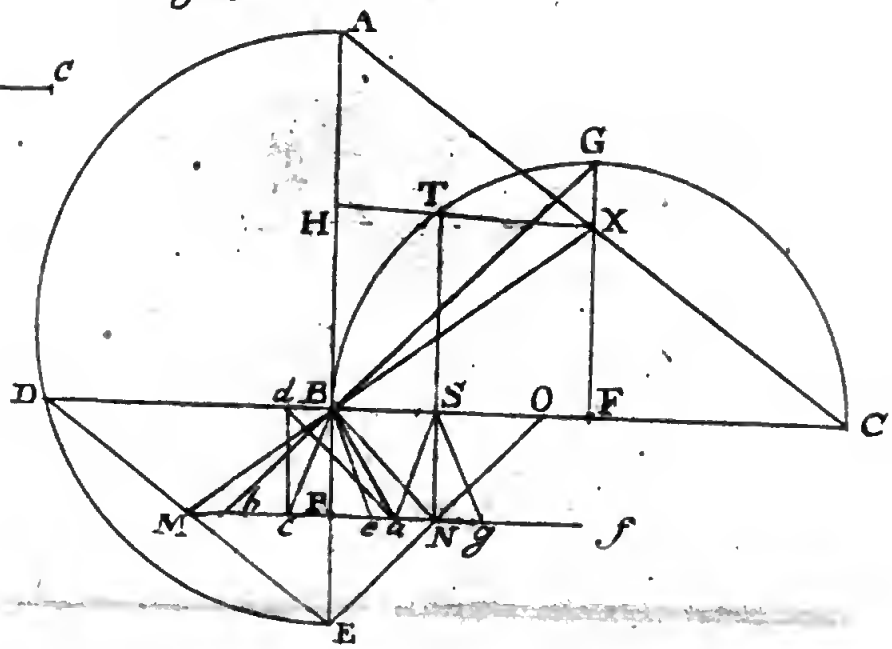


fig. 4



Digitized by Google

BIBLIOTECA